La pulga y las trampas

En este juego los alumnos necesitan descubrir números que estén contenidos en varias escalas o tablas a la vez, es decir los múltiplos comunes a varios números. De este modo y, considerando distintas versiones, es posible abordar una red de nociones del campo multiplicativo: escalas, tablas, descomposición en factores, múltiplos, múltiplos comunes y, consecuentemente, divisores, números primos y compuestos, y criterios de divisibilidad.

Materiales

Para cada grupo: una tira con números, una bolsa con aproximadamente 20 chapitas/tapitas/semillas.
Para cada equipo: una piedrita con la que pondrán la trampa.
La tira puede hacerse en papel de aproximadamente un metro de largo por cinco centímetros de ancho. También puede dibujarse con tiza.

Reglas

En cada grupo se elige a uno de los niños del equipo, que será quien coloque la piedrita en cualquier número de la tira, después del cero. Esa es la trampa. Los demás toman una chapita, ven dónde está la trampa y deciden si su chapita recorrerá la tira saltando de dos en dos o de tres en tres. En su turno cada jugador coloca la chapita en el cero y la hace avanzar con los saltos del tamaño que haya elegido. Si logra atravesar toda la tira sin caer en la trampa se queda con su chapita, de lo contrario se queda con ella el niño que puso la trampa. Una vez que todos hicieron avanzar su chapita, le toca a otro niño colocar la trampa. El juego termina cuando todos tuvieron oportunidad de colocar la trampa dos veces. Gana el niño que se quedó con más chapitas.

Versiones

Para generar las versiones se pueden modificar los números en la tira, la cantidad de trampas que se ponen y los distintos saltos que se pueden dar.

Versión	Tira	Trampas	Saltos
1	0 al 20	2	2 o 3
2	0 al 30	2	2 hasta 5
3	0 al 40	3	2 hasta 7
4	0 al 50	4	2 hasta 9

Cabe señalar que para poder plantear este juego en el aula es necesario que los niños, aún los más pequeños, hayan tenido antes algún contacto con escalas. De otro modo, es muy probable que el juego no pueda evolucionar y se limite a avanzar contando el avance de uno en uno.

Propuesta 1 Descubrir relaciones entre escalas

Organización de la clase

Para empezar, todos juegan a la versión 1 para familiarizarse con el juego. Luego, se separan en grupos.

Grupo	Versión	Propósito	Preguntas para después de jugar
Amarillo A	1	Contar de 2 en 2, de 3 en 3. Reconocer qué números están en la escala del 2 y del 3.	Una pulga saltaba de a 2 (3) y estaba en el … 8 (9) ¿por qué números pasó después si no cayó en la trampa? Id. variando los números en los que se inicia la escala.
Amarillo B	1 con 1 trampa	Fortalecer el repertorio de productos por 2 y por 3.	Una pulga saltaba de a 2 (3), dio 4 saltos y cayó en la trampa. ¿En qué número estaba la trampa? Id. variando la cantidad de saltos.
Naranja	1 con tira hasta 30 y 1 trampa	Reconocer números que están en la tabla del 2 y en la del 3.	Un trampero dice que puso su trampa en el 15 y que seguro atrapa a cualquier pulga, ¿tiene razón? Id. variando el número. Si un trampero atrapó a dos pulgas que saltaban a la vez, una de a 2 y otra de a 3 y la trampa estaba entre el 23 y el 30, ¿podemos saber dónde la puso?

Después de jugar

Al finalizar varias rondas se comenta entre todos cuáles fueron buenas trampas y cuáles no.

Después se pueden hacer distintas preguntas, indicando de qué grupo debe ser el alumno que responda, aunque todos escuchan. También se pueden escribir las preguntas en tarjetas, colocarlas en una caja y sacar de a una al azar para ver quién la puede responder, dando siempre la oportunidad primero a los más chicos.

En la puesta en común:

Los alumnos del Grupo A pueden escribir una lista con los números por los que pasa la pulga cuando salta de a 2 y otra lista con los números por los que pasa cuando salta de a 3. Los alumnos del Grupo B pueden decir por qué al trampero le convienen unos números y no otros, y señalar los comunes.

Los del Grupo naranja pueden registrar las conclusiones escribiendo, por ejemplo: los números 6, 12, 18 están en la tabla del 2 y en la tabla del 3. Incluso se podría agregar que esos números también están en la tabla del 6.

En los cuadernos:

Cada uno realiza algún registro o actividad sencilla como, por ejemplo:

A

Completá avanzando de 2 en 2.

2 ___ ___ ___ ___ 10 ___ ___ ___ ___

B

Escribí cuatro multiplicaciones por 2 que ya sé de memoria.

Escribí cuatro multiplicaciones por 3 que ya sé de memoria.

Si seguimos la tabla del 2 hasta 30, ¿qué números hay que agregar?

¿Cuáles de esos números están en la tabla de 3?

Si seguimos las tablas del 2 y del 3 hasta el 40, ¿qué números están en las dos?

Propuesta 2 Identificar múltiplos, divisores y múltiplos comunes

Organización de la clase

En este caso se plantean alternativas que no incluyen a los más pequeños. Sin embargo, conviene que todos jueguen primero a la versión 1 para familiarizarse con el juego y luego se separen en grupos.

Grupo	Versión	Propósito	Preguntas para después de jugar
Naranja	1 tira hasta 60 con 1 trampa	Relacionar productos x2; x3; x6	¿Todos los números terminados en 0 son buenos lugares para la trampa? ¿Y todos los pares? ¿Qué números pares son buenas trampas?
Rojo A	2	Identificar múltiplos comunes a distintos números.	¿Es cierto que, con una trampa en el 15 y otra en el 16 seguro gana el trampero? Id. 20 y 24, 15 y 24, etc. Si Sergio ya puso una trampa en el 12, ¿dónde puede poner la otra para ganar? Id. 25, 27, etc. Una trampa estaba en el 25 y otra en el 18, una pulga se salvó, ¿qué saltos daba?
Rojo B	3	Calcular múltiplos comunes distintos números.	Si Patri ya puso una trampa en el 28, ¿dónde puede poner las otras para ganar? Id. 36, 27, etc. ¿Se puede ganar solo con 2 trampas? ¿Y con una? ¿De qué largo tiene que ser la tira en cada versión para poder ganar con una sola trampa?

En la puesta en común:

Se pueden explicitar las nociones de múltiplo (divisor) y de múltiplo común.

La explicitación podría tomar distintas formas. Por ejemplo:

Los **múltiplos** de un número son:
- todos los de su escala, o
- todos los de su tabla, o
- todos los que se obtienen al multiplicarlo por cualquier número natural.

Por ejemplo: 12 es múltiplo de 2, de 3, de 4, de 6 porque 2 × 6 = 12; 3 × 4 = 12

Los **divisores** de un número son:
- todos los que lo dividen exactamente
- todos los que, al dividirlo, dan resto cero.

Por ejemplo: 5 es divisor de 15 porque 15 : 5 = 3 y esa división tiene resto 0.

Si bien es cierto que todo número es múltiplo y divisor de sí mismo y de 1, tal vez no sea oportuno plantear esa cuestión en este momento, al menos no para toda la clase. Si se lo considera adecuado, es posible analizar ese caso con los alumnos más avanzados.

En los cuadernos

Escribí los números que están en la tabla del 3 y no en la del 6.

Decidí, sin hacer la cuenta, si estas divisiones dan justo o no:

30 : 6; 40 : 6; 50 : 6; 90 : 6

A

Marcá con rojo los números que son a la vez múltiplos de 4 y de 3 y, con azul, los que son múltiplos de 2 y de 5:

10-12-14-16-18-20-22-24-26-28-30-32-34-36

¿Qué número habría que agregar a la serie para marcarlo con los dos colores?

B

Escribí dos números que sean:

- múltiplos de 4 y de 6
- múltiplos de 6 y de 5
- múltiplos de 2, 3 y 5

¿Es cierto que si se multiplica 60 × 80 el resultado es múltiplo de 3 y de 4?

En un momento posterior –dependiendo de los conocimientos del grupo de alumnos– también es posible realizar algunas descomposiciones en factores para justificar por qué un número es múltiplo de otros.

Por ejemplo:

Como $48 = 6 \times 8 = 3 \times 2 \times 4 \times 2$
48 es múltiplo de 6 porque se puede escribir como 6×8
Como $6 \times 8 = 3 \times 2 \times 4 \times 2$
48 es múltiplo de 4 porque se puede escribir como 4×12
48 es múltiplo de 3 porque se puede escribir como 3×16

Estas descomposiciones van a ser muy útiles para calcular divisiones mentalmente, dado que el resultado de la división por uno de los factores se obtiene de multiplicar los otros:

$36 = 6 \times 6 = 3 \times 2 \times 3 \times 2$
$36 : 3 = 2 \times 3 \times 2 = 12$
$36 : 4 = 3 \times 3 = 9$

Fortalecer este trabajo con números pequeños permitirá luego tener disponible una estrategia y un repertorio de cálculos memorizados, muy útiles para las operaciones con números más grandes.

Cuando se trata de procedimientos de cálculo, tenemos que considerar que su elección depende del tipo de números involucrados, y de los conocimientos disponibles sobre el sistema de numeración y las propiedades de las operaciones.

Propuesta 3 Identificar números primos y compuestos

Organización de la clase

Para avanzar, después de jugar a cualquiera de las versiones, es posible cambiar las reglas de modo que ahora se trate de “salvar a la pulga”. En este caso, gana el trampero si la pulga no cae en ninguna de las trampas (variable didáctica).

El salto que da la pulga se puede dejar a elección, se puede fijar de antemano o se puede intentar salvar a una “familia de pulgas” donde cada una da un salto distinto.

En la puesta en común:

La reflexión se centrará en las nociones de números pares e impares (para la primera versión) o números primos y compuestos (para alumnos más grandes).

Asimismo, y dado que para salvar a las pulgas los saltos no deben ser “divisores” de los números donde se colocan las trampas, es posible escribir algunas afirmaciones relacionadas con criterios de divisibilidad. Por ejemplo:

- *si la trampa está en un número par, caen las pulgas que saltan de a 2.*
- *si la trampa está en un número que termina en cero, caen las pulgas que saltan de a 2 y de a 5.*
- *si la trampa está en un número que está en la tabla del 6, seguro caen las pulgas que saltan de a 2 y de a 3.*

En un primer momento, las afirmaciones pueden hacerse en el contexto del juego, esto es, refiriéndose a las pulgas y las trampas, para luego pasar a hablar de números, múltiplos, divisores. Por ejemplo: si un número es múltiplo de 6, entonces es múltiplo de 3 y de 2.

Si recuperamos las versiones del juego y los contenidos que se pueden abordar en cada una de estas propuestas, podemos observar que nos permiten vincular la multiplicación y la división a través de las relaciones de múltiplo y divisor.

Para avanzar es posible, entonces, investigar estas relaciones para el caso de los alumnos del segundo ciclo.

Propuesta 4 Dividir y estudiar la división

En los cuadernos

Para los más chicos, se podría pensar en un trabajo diferente, ligado a la exploración de repartos en contexto extra-matemático para determinar si sobra, o no sobra, cuando se realizan repartos equitativos. Por ejemplo:

Para el taller de arte juntamos 15 pinceles. Tenemos que acomodarlos en 3 latas de modo que en cada una haya la misma cantidad de pinceles ¿Cuántos pondremos en cada lata?

Si tenemos 5 latas, ¿cuántos pinceles podemos poner en cada una?

Variar las situaciones y los números permitirá identificar repartos en los que sobra y en los que no sobra, lo que tendría que explicitarse si se ponen en común las producciones realizadas en los cuadernos.

En este caso, no se trata de que los niños usen la división ya que también podrían dibujar o usar palitos y, dependiendo de los números que se elijan y de los conocimientos previos de los alumnos, apoyarse en la resta o la multiplicación.

Para los más avanzados se pueden proponer consignas que lleven a la argumentación como, por ejemplo:

Ana dice que si hay 15 pinceles y 2 latas, se pueden repartir pero seguro no queda la misma cantidad en cada lata, ¿tiene razón?

También es posible volver sobre las tablas y explorar si sobra o no cuando se reparten entre 2 cantidades que están en la tabla del 2 o la del 3.

Más adelante se podrá introducir la escritura habitual para la división. Eventualmente, y según con qué contexto se trabaje, se podría discutir si es posible seguir repartiendo lo que sobra.

En el caso de los alumnos que ya conocen la división, y cierto repertorio multiplicativo, es posible avanzar con un estudio intra-matemático sobre divisibilidad.

a) Ya estudiamos que si un número está en la tabla del 6 se puede dividir por 2 y por 3 sin que sobre nada.

Exploren qué pasa con otras tablas:

- Si un número está en la tabla del 8, ¿tiene resto 0 cuando se divide por 2? ¿Y por 3? ¿Y por 4?
- Si un número está en la tabla del 9, ¿tiene resto 0 cuando se divide por 2? ¿Y por 3? ¿Y por 4?
- Si un número está en la tabla del 10, ¿tiene resto 0 cuando se divide por 2? ¿Y por 3? ¿Y por 5?

b) Decidan, sin hacer la cuenta, si estas divisiones dan justo o no:

44 : 4   44 : 2   44 :5   66 : 2   66 : 3   66 : 5   55 : 5   55 : 2

c) Escriban tres números que no estén en las tablas y que se puedan dividir justo por…

2
4
5

Ya estudiamos que hay números que tienen varios divisores, pero ¿cómo se puede saber si un número es divisible por otro sin hacer la cuenta?

a) Escribí diez números que sean divisibles por 2.

¿Qué característica tienen en común?

Escribí dos números que sean de tres o cuatro cifras que tengan esa característica y comprobá con la calculadora si se obtiene resto 0 cuando los dividís por 2.

b) Escribí diez números que sean divisibles por 5.

¿Qué característica tienen en común?

Escribí dos números que sean de tres o cuatro cifras que tengan esa característica y comprobá con la calculadora si se obtiene resto 0 cuando los dividís por 5.

c) ¿Es cierto que para saber si un número es divisible por 2 o por 5 alcanza con mirar cuál es la última cifra?

d) Ana dice que 2, 5 y 10 son divisores de cualquier número terminado en cero. ¿Te parece que tiene razón?

Cabe señalar que cuando presentamos enunciados de problemas vinculados al uso de múltiplos y/o divisores, es importante que tengamos presente que, para resolverlos, hay que utilizar un repertorio multiplicativo importante. Si bien estos problemas contribuyen a memorizar las series de múltiplos, las posibilidades de abordar las nuevas nociones mejoran si los alumnos ya tienen disponible el repertorio multiplicativo que se fue instalando desde años anteriores.

En la puesta en común

Al comparar las distintas producciones será posible explicitar los criterios de divisibilidad por 2, 5 y 10. Aclaremos que la posibilidad de abordar un mismo contenido, y compartir una puesta en común, no implica que todos los alumnos estén otorgando el mismo significado a las palabras que se utilizan. Asimismo, en el caso particular de los criterios de divisibilidad, resulta compleja la justificación de los mismos y, para algunos niños, bastará con una primera aproximación. Entender por qué basta con analizar la última cifra supone poder descomponer el número, saber que, si dos números son divisibles por otro, la suma también lo es, y dominar la definición de múltiplo/divisor. Por ejemplo:

$123576 = 123570 + 6 = 12357 \times 10 + 6 = 12357 \times 5 \times 2 + 6$

123570 se puede escribir como $12357 \times 5 \times 2$, lo que prueba que es divisible por 5 y por 2

6 es divisible por 2, y no por 5,
entonces 123576, que es la suma de 123570 más 6, se puede dividir por 2 pero no por 5.

La justificación del criterio de divisibilidad por 4 es similar ya que se trata de descomponer el número separando sus dos últimas cifras. En esos casos uno de los sumandos termina en 00 y se puede descomponer en un cierto número por 100, que es divisible por 4.

$123576 = 123500 + 76 = 1235 \times 100 + 16 \times 4 = 1235 \times 25 \mathbf{\times 4} + 16 \mathbf{\times 4}$

Entonces, 123576 es divisible por 4 porque se puede descomponer en dos sumandos que son ambos divisibles por 4.

Comprender otros criterios como el del 3 y el 9 resulta muy complejo para esta etapa. Sin embargo, los alumnos más grandes podrían investigar cuáles son y comunicarlos a sus compañeros, a nivel informativo.

Para avanzar con el estudio de la divisibilidad se puede considerar la relación dividendo, divisor, cociente y resto, y qué restos puede tener cada división. Tomar este camino dependerá mucho de los conocimientos que tengan los alumnos sobre las cuentas de dividir y, si fuera necesario, habría que fortalecer las estrategias de cálculo antes de continuar.

También se podría avanzar con la resolución de problemas que involucren repartos o particiones en contexto extra-matemático, anticipando antes de resolver si quedará resto o no.

En todos los casos, los divisores podrán ser de una o dos cifras según los conocimientos de los alumnos y el maestro puede adaptar fácilmente los enunciados cambiando los números.

A continuación se presenta una propuesta para cada una de estas alternativas.

Organización de la clase

Se puede presentar una situación al grupo completo y luego distribuir las preguntas a los subgrupos. Por ejemplo:

En una panadería se preparan bolsitas y bandejas con facturas, alfajores y sandwiches para agilizar las ventas cuando hay muchos compradores. Las medialunas van en bolsas de 12, los sandwiches en bandejas de 10 y para los alfajores hay bolsitas de 4 o bandejas de 6.

Naranja	Rojo
Con 72 alfajores, ¿se pueden hacer bolsitas sin que sobre ninguno? ¿Y bandejas? ¿Podría armar bolsitas y bandejas? ¿Cuántas de cada una? ¿Cuántas bolsas de medialunas se pueden hacer con 200 medialunas? ¿Cuántas bandejas se necesitan para 120 sandwiches? ¿Y para 245?	En una bandeja en la que entran 80 alfajores, el panadero calcula que hay más de 70 alfajores. Si preparan bolsitas de 4 van a sobrar, pero si hacen bolsas de 6 no. ¿Podemos saber cuántos alfajores había? Si hay 250 medialunas, ¿es cierto que se necesitan más de 20 bolsas para envasarlas? ¿Cuántas habría que poner en cada bolsa para que no sobre ninguna?

En estos casos, el significado corresponde a la idea de partición, que es necesario reforzar. Se debe tener en cuenta que cuando se piensa “cuántas veces entra” el divisor en el dividendo para estimar el cociente, estamos apoyándonos en la idea de partición. Por lo tanto, si este significado no ha sido explorado antes, resultará imposible para los alumnos relacionar esa estimación con el significado de reparto.

Al hablar del uso de las operaciones en distintos contextos se debe tener en cuenta que cada operación puede usarse para resolver diferentes problemas, asociados con diversos significados de la operación. Asimismo, cada problema puede resolverse con distintos procedimientos, y cada uno puede involucrar diversas operaciones y formas de escritura.

Para avanzar con

el estudio de la divisibilidad es posible plantear actividades como las siguientes:

En los cuadernos

Naranja	Rojo
Escribí una cuenta de dividir usando números naturales, que tenga divisor 8 y resto 4.	a) Escribí una cuenta de dividir usando números naturales, que tenga divisor 18 y resto 4.
Escribí una cuenta de dividir usando números naturales, que tenga cociente 8 y resto 4.	¿Cuántas cuentas podrías encontrar que cumplan esas condiciones? ¿Y si el resto fuera 5? ¿Y si fuera 19?
Escribí otras cuentas que cumplan las condiciones de a) y b)	b) Escribí una cuenta de dividir usando números naturales, que tenga cociente 18 y resto 4.
Al dividir un número por 8, se obtuvo 12 y resto 4. ¿Qué número se dividió?	¿Cuántas cuentas podrías encontrar que cumplan esas condiciones? ¿Y si el resto fuera 5? ¿Y si fuera 9?
¿Cuántas cuentas distintas podés escribir que tengan divisor 8 y cociente 12? ¿Por qué?	c) ¿Cuántos restos distintos puede tener una cuenta de dividir por 8? ¿Y si el divisor es 18?
¿Cuántos restos distintos puede tener una cuenta de dividir por 4? ¿Y si el divisor es 8?	d) Al dividir un número por 18, se obtuvo 12 y resto 4. ¿Qué número se dividió?
	e) ¿Cuántas cuentas distintas podés escribir que tengan divisor 18 y cociente 12? ¿Por qué?

En la puesta en común

Además de explicitar la relación **dividendo = divisor x cociente + resto**, es interesante advertir que, aunque varias preguntas tienen infinitas respuestas posibles, los números que se eligen tienen que cumplir ciertas relaciones. En particular, interesa destacar que el resto debe ser menor que el divisor.

Propuesta 5 Ampliar las estrategias de cálculo

Conocer los criterios de divisibilidad y algunas relaciones con números terminados en 0 permite resolver una cuenta de dividir descomponiendo el dividendo en una suma y aplicando la propiedad distributiva. De este modo, se reemplaza una cuenta "difícil" por dos cuentas más sencillas cuyos resultados se suman luego.

Organización de la clase

Primero se puede presentar esta estrategia al grupo total, con un ejemplo al alcance de todos, y luego pedir que la repliquen, variando los números para cada alumno/grupo, de modo que resulten adecuados a sus posibilidades de cálculo. Por ejemplo:

a) Para resolver 548 : 5 Ana pensó en hacer la cuenta por partes descomponiendo 548 en 500 + 40 + 8, pero Pedro dice que no hace falta hacer tres cuentas, ya que se puede descomponer en 500 + 48.

Comparen las cuentas que hicieron los chicos y decidan quién tiene razón:

ANA
500 + 40 + 8 | 5
0 0 3 | 100 + 8 + 1 = 109

PEDRO
500 + 48 | 5
0 3 | 100 + 9 = 109

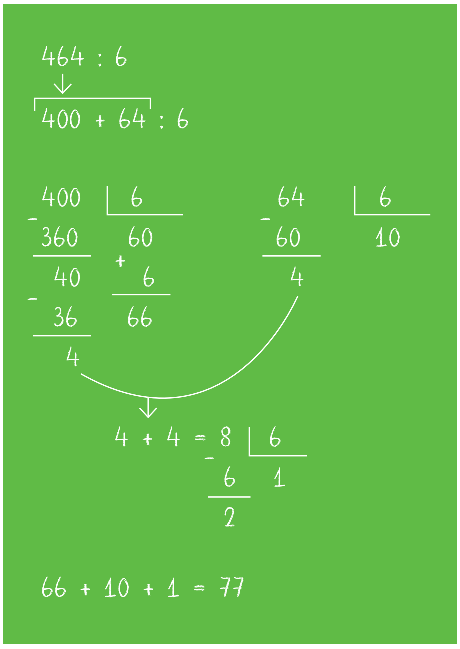
b) ¿Qué descomposición usarían para dividir 487 : 4? ¿Y para 587 : 4?

c) ¿Cómo podrían descomponer 464 para que fuera fácil de dividir por 5? ¿Y por 6?

En la puesta en común

Además de comparar las explicaciones de los chicos y registrar las estrategias de cálculo, se podrían analizar otras descomposiciones posibles.

Por ejemplo, para 464 : 6 conviene calcular 420 + 44, obteniendo como resultado 70 + 7 = 77 con resto 2. Pero también se puede hacer 400 + 64, teniendo en cuenta que hay que recuperar los restos. Es decir, sumando los dos restos de 4 tenemos 8, que se puede dividir por 6 una vez más, haciendo que quede resto 2.



Este proceso puede parecer largo y complejo para los adultos, pero lo interesante es el análisis de las relaciones puestas en juego, la posibilidad que tienen los alumnos de tomar decisiones acerca de cómo resolver y el control que pueden tener sobre los resultados que obtienen.

De todos modos, en este caso, conviene elegir al menos un sumando que sea múltiplo para facilitar el cálculo y hacer menos aproximaciones.